（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	元良　直輝
論文題目	Free fields realizations of W-algebras and Applications （W代数の自由場表示と応用）		

（論文内容の要旨）

有限次元単純スーパーリー環gと、その冪零元fに対して、対応する(アフィン)W代数が定義される。W代数はアフィンリー環やVirasoro代数のある種の一般化であり、またPremetによって定義された有限W代数のアフィン化と見なすことができる。有限W代数がSlodowyの横断片の自然な量子化であるのに対し、W代数はSlodowyの横断片のアーク空間の量子化である。W代数は二次元の共型場理論の研究の中で８０年代に物理学者によって最初に導入されたが、様々な数学の分野と密接に関係する事が分かっており重要な代数系である。一方、W代数はDrinfeld-Sokolov還元法と呼ばれる一種のハミルトニアン還元法によりコホモロジカルに定義され、大変複雑な構造を持つ。特にW代数の生成元と関係式による記述は一般には知られていない。

一方、ｇがリー環で、fが主冪零元のときには、1990年のFeigin-Frenkelの結果により、W代数が遮蔽作用素（screening operator）を用いたより具体的な実現を持つことが知られており、応用上この実現が大きな役割を果たしてきた。しかし、遮蔽作用素による実現は一般のW代数の場合には知られておらず、このことがW代数や関連分野の研究を著しく困難にしてきた。

本論文では、まず、

1. 全てのW代数に対して遮蔽作用素を用いた実現を与えることに成功した。

これは、1990年のFeigin-Frenkelの結果の大幅な拡張である。

この応用として、

2. osp(1,n)とその主冪零元に付随するW代数が、Fateev-Lukyanovが導入したWBn代数に同型であるという1992年の予想の証明、

及び

3.A型の副冪零元に付随するW代数が、Feign-Semikhatovが導入したW_n^{(2)}代数に同型であるという予想の証明、

を与えることに成功した。

さて、応用上、自由場表示（脇本表現）と呼ばれるより具体的な表示を与えることも重要である。fが主冪零元のときには上の遮蔽作用素による実現と自由場表示は同値であったが、一般の冪零元の場合にはこれらは異なるものになる。

本論文では、

4. gがリー環の場合に全てのW代数の自由場表示（脇本表現）の実現を与えた。

この一つの応用として、

5. 有限W代数の場合にBrundan-Kleshchev、Premet及びLosevによって与えられていた放物誘導を、（A型の場合いつも満たされるある条件のもと）アフィンW代数の場合に導入することに成功した。

放物誘導は異なるW代数の間の関係を与えるものであり、応用上大変有益である。実際、Brundan-KleshchevがA型の有限W代数の有限次元表現の指標を決定した際、放物誘導が本質的な役割を果たした。ただし有限W代数の放物誘導をそのままアフィンW代数の場合に一般化することは不可能であり、全く異なるアイデアを用いる必要があった。なおこの結果は有限W代数にも応用があり、Brundan-KleshchevがA型の場合に定義した余積をBCD型の有限W代数に対して拡張した。

以上の結果はどれも基本的かつ重要な結果であり、今後様々な応用が期待できる。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

W代数は1980年代に導入されたが、様々な話題と関係し、数学者と物理学者双方から多くの研究がある。一方、その構造は大変複雑であり、本世紀に入ってからその理解が大幅に進んだとはいえ、W代数に関しては多くの未解決問題が残されている。

W代数は頂点代数として定義されるが、最近物理学においてRastelli等による4d/2d双対性の発見があり、頂点代数の重要性が再認識されている。またGaiotto等による研究により、4次元の超対称ゲージ理論の中で頂点代数が本質的な役割を果たすことも示された。さらにGukov等による研究により、四次元多様体の不変量としても頂点代数が現れることが示された。このような頂点代数の理論の最近の進展において、W代数は常に中心的な登場人物として現れている。他方、幾何学的Langlands対応の最近の発展においてもW代数は本質的な役割を果たしており、その重要性はますます高まっている。

本論文では、W代数に関する未解決問題のうち、特に基本的かつ重要なものを解決することに成功し、著しい応用を得た。

そのうちの一つは、「W代数の遮蔽作用素を用いた記述とその応用」である。

W代数はDrinfeld-Sokolov還元法と呼ばれる一種のハミルトニアン還元法によりコホモロジカルに定義されるが、その生成元と関係式による記述は一般には知られていない。一方, gがリー環でfが主冪零元のときにはFeigin-Frenkelの1990年の結果により、W代数が遮蔽作用素と呼ばれる作用素を用いたより具体的な記述を持つことが知られていた。遮蔽作用素による記述は、特にAGT予想などにゲージ理論に関係する幾何の中で現れるW代数を記述するのに不可欠なものであるが、一般のW代数に関してはこのような記述は全く存在しなかった。

このような状況の中、申請者は、全てのW代数に対して遮蔽作用素を用いた実現を与えることに成功した。これは、1990年のFeigin-Frenkelの結果の大幅な拡張である。さらにこの結果の応用として、W代数の同型問題に関する二つの予想を解くことに成功した。そのうち一つは、1992年以来未解決であった問題である。

もう一つは、「W代数の自由場表示（脇本表現）の実現と放物誘導の導入」である。

W代数は頂点代数として定義されるが、一方で「量子群的構造」を持つことが期待されている。このような構造は有限W代数の場合にはA型の場合にBrundan-Kleshchevがある種の「余積」を導入することによって記述し、さらにPremetとLosevが「放物誘導」として一般化した。しかし、有限W代数の放物誘導をそのままアフィンW代数の場合に一般可することは技術的に不可能であり、新しいアイデアが必要であった。これが申請者以前の状態であった。

申請者はそれまで未解決問題であったW代数の自由場表示（脇本表現）の遮蔽作用素による記述を与えることにより（A型の場合いつも満たされるある条件のもと）アフィンW代数の放物誘導を導入することに成功した。この結果はW代数の量子群的構造を理解するための最初のブレークスルーを与えるものであり、今後様々な応用が期待できる。

以上の結果は学術論文として一級の業績であり、前半部分に関しては既にSelecta Mathematica New Series から出版されている。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成３１年１月１７日、論文内容とそれに関係した口頭試問を行った結果合格と認めた。

要旨公表可能日：　学位授与後即日